

Nuclear solid modules over Stone δ -rings

立教大学大学院 理学研究科 数学専攻

山田雄斗 (Yuto YAMADA) *

概要

距離付け可能な副有限集合による δ -環上の”導来圏”の候補を (light) condensed mathematics を用いて与える. それが, その位相空間上の層に対応することを明らかにした.

1 導入

まずは, P.Scholze と D.Clausen により導入された新しい枠組みである **(light) condensed mathematics** に説明する ([LCM] や [AnStk]). これは, 距離付け可能な副有限集合上の層の理論である. とくに重要なものとして, 以下の 2 つが存在する:

$$\mathrm{Cond} := \mathrm{Shv}_{\mathrm{eff}}(\mathrm{ProFin}^{\mathrm{light}}, \mathrm{Set}), \quad \mathrm{CondAb} := \mathrm{Shv}_{\mathrm{eff}}(\mathrm{ProFin}^{\mathrm{light}}, \mathrm{Ab}).$$

具体的には, Cond は, 以下をみたすような関手 $(\mathrm{ProFin}^{\mathrm{light}})^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{Set}$ 全体である (CondAb についても同様である.):

1. $F(\emptyset) = *$ である.
2. 任意の $S_1, S_2 \in \mathrm{ProFin}^{\mathrm{light}}$ に対して, $F(S_1 \sqcup S_2) = F(S_1) \times F(S_2)$ が成立する.
3. 任意の $\mathrm{ProFin}^{\mathrm{light}}$ での全射 $S_1 \rightarrow S_2$ に対して, $F(S_2) = \mathrm{eq}(F(S_1) \rightrightarrows F(S_1 \times_{S_2} S_1))$ が成立する.

Cond は収束性の備わった集合と見做すこともできて, condensification という関手 $\mathrm{Top} \ni T \mapsto \mathrm{Cont}(-, T) \in \mathrm{Cond}$ により, 距離付け可能なコンパクトハウスドルフ空間を忠実充満に含んでいる.

また, CondAb は Cond に (abel) 群作用の入ったものである. この内で収束性と総和可能性が一致するような充満部分圏を Solid と表す. 実際, Solid に, 実数体 $\mathbb{R}$ は含まれず, p -進整数環 $\mathbb{Z}_p$ や整数環 $\mathbb{Z}$ は含まれる.

更に, Solid には $\otimes^{\blacksquare}$ という対称モノイダル構造が存在して, これは通常のテンソル積に対して, 位相構造が含まれたものと見做すことができる.

この $\mathbb{Z}_p$ -加群の **nuclear 対象** を $\mathcal{D}$ とする. これは, つまり, 以下のような (∞) -圏である:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathrm{Solid}_{\mathbb{Z}_p}) &:= \{M \in \mathcal{D}(\mathrm{Solid}) \mid M \otimes^{L\blacksquare} \mathbb{Z}_p \simeq M\}, \\ \mathcal{D} &:= \mathrm{Nuc}(\mathcal{D}(\mathrm{Solid}_{\mathbb{Z}_p})) = \{M \in \mathcal{D}(\mathrm{Solid}_{\mathbb{Z}_p}) \mid M \text{ is } p\text{-complete and } M/Lp \text{ is discrete}\}. \end{aligned}$$

* E-mail: 23lc012z@rikkyo.ac.jp

ただし, $\mathcal{D}(\text{Solid})$ は Solid の $(\infty\text{-})$ 導来圏を意味する.

次に, p -導分と呼ばれる自己写像を備えた環である δ -環について説明する. 正確には, p -導分とは以下をみたすような自己写像 $\delta: A \rightarrow A$ である:

1. $\delta(1) = 0$ である.
2. 任意の $x, y \in A$ に対して, $\delta(xy) = x^p \delta(y) + \delta(x) y^p + p \delta(x) \delta(y)$ が成立する.
3. 任意の $x, y \in A$ に対して, $\delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y) + \frac{(x^p + y^p) - (x + y)^p}{p}$ が成立する.

この例は $\mathbb{F}_p$ -代数の Witt 環により得ることが出来る. 更に, Frobenius 射が同型となるような perfect $\mathbb{F}_p$ -代数は, この Witt 化により, δ -環に忠実充満に含まれる.

一方で, Frobenius 射が恒等的であるような p -Bool 代数は, Stone 双対により, 副有限集合と (反対) 圏同値である. これは, とくに Frobenius 射が同型であるので, perfect $\mathbb{F}_p$ -代数であることに注意する. この Witt 環でかけるような p -進完備な δ -環を **Stone δ -環** という. これは, δ -環 A の p -導分を用いて $x \mapsto x^p + p\delta(x)$ で定まる **Frobenius lift** が恒等射になるものと見做すこともできる.

これらの圏同値は具体的に以下の関手で与えられることに注意しておく:

$$\begin{aligned} (\text{Stone}^{\delta, \wedge})^{\text{op}} \ni A &\longmapsto \text{Hom}_{\delta}(A, \mathbb{Z}_p) \in \text{ProFin}, \\ \text{ProFin} \ni S &\longmapsto \text{Cont}(S, \mathbb{Z}_p) \in (\text{Stone}^{\delta, \wedge})^{\text{op}} \end{aligned}$$

2 主定理

1 つ目に, Stone δ -環には p -進忠実平坦による位相を備えることで, 以下の site の同型を得た:

$$((\text{Stone}^{\delta, \wedge})^{\text{op}}, \tau_{p\text{-fpqc}}) \simeq (\text{ProFin}, \tau_{\text{eff}}).$$

ただし, 環の射 $A \rightarrow B$ が p -進忠実平坦であるとは, 法 p 還元により誘導される射が忠実平坦であり, 導来テンソル積 $B \otimes_A^L A/p$ が 0 次に集中しているということである.

また, p -捻れのない p -進完備な δ -環は Stone δ -環による p -進忠実平坦な (標準的な) 被覆をもつこともわかった:

$$A \rightarrow \text{coker}(A_{\text{coperf}} \xrightarrow{\tilde{\phi}-1} A_{\text{coperf}})_{(p)}^{\wedge}.$$

ただし, $\phi, \tilde{\phi}$ は A, A_{coperf} の Frobenius lift であり, A_{coperf} は以下の余極限を意味する:

$$A_{\text{coperf}} = \text{colim}(A \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\phi} \cdots) \quad \text{in } \text{Ring}^{\delta}.$$

2 つ目に, 以下に沿って, 距離付け可能な副有限集合 S 上の "構造層" を定めた. ここで, A を $\text{Cont}(S, \mathbb{Z}_p)$ とすると, 先の対応を以て, (Stone) δ -環の構造をもつ. また, $\mathcal{D}_A$ を $\text{Mod}_A(\mathcal{D}) = \{M \in \mathcal{D} \mid M \otimes_A^{\mathbf{L}} A \simeq M\}$ とする.

$$\text{Closed}(S) \ni K \longmapsto \text{Cont}(K, \mathbb{Z}_p) \in \text{Idem}(\mathcal{D}_A)^{\text{op}}$$

という関手は有限余極限と極限と交換する. これにより, $\mathbb{Z}_p$ -値の関数環を与える "構造層" ($=\mathcal{D}_A$ の可換代数対象の層) $\mathcal{O}$ を得る. これを用いて, 以下の関手を得る:

$$\mathcal{D}_A \ni M \longmapsto (K \longmapsto M \otimes_A^{\mathbf{L}} \mathcal{O}(K)) \in \text{Mod}_{\mathcal{O}}(\text{Shv}(S, \mathcal{D})).$$

これは, S の開集合 U に対して, $\mathrm{fib}(A \rightarrow \mathcal{O}(S \setminus U))$ が $\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Shv}(S, \mathcal{D}))$ の”生成子” h_U に写るので, 主定理の以下の (∞) -圏の同型を得る:

$$\mathcal{D}_A \simeq \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Shv}(S, \mathcal{D})).$$

これを推し進めることで, δ -環の”幾何学的対象”について研究していきたい.

参考文献

- [LCM] Dustin Clausen and Peter Scholze, *Lectures on Condensed Mathematics*, available at the website [LCM] (2019)
- [AnStk] Dustin Clausen and Peter Scholze, *Analytic Stacks*, available at YouTube [AnStk] (2024)